

УДК 517.98

Крайность трансляционно-инвариантной меры Гиббса для НС-модели на дереве Кэли

У.А.Розиков¹, Р.М.Хакимов²

В данной статье изучается крайность трансляционно-инвариантной меры Гиббса для Hard-Core (НС) модели на дереве Кэли. Известно, что трансляционно-инвариантная мера для этой модели единственна. Дано новое доказательство этого утверждения и найдены области крайности этой меры на дереве Кэли.

Ключевые слова: дерево Кэли, допустимая конфигурация, НС-модель, мера Гиббса, трансляционно-инвариантные меры, крайность меры.

1 Введение

Для достаточно широкого класса гамильтонианов известно, что множество всех предельных мер Гиббса (соответствующих данному гамильтониану) образует непустое выпуклое компактное подмножество в множестве всех вероятностных мер (см. например [1]), и каждая точка этого выпуклого множества однозначно разлагается по его крайним точкам. В связи с этим особый интерес представляет описание всех крайних точек этого выпуклого множества, т. е. крайних мер Гиббса.

В работе [2] была доказана единственность трансляционно-инвариантной меры Гиббса (ТИМГ) и не единственность периодических мер Гиббса для НС-модели. Также в [2] (соответственно в [3]) найдено достаточное условие на параметры НС-модели, при котором ТИМГ является не крайней (соответственно крайней). В работе [4] изучены слабо периодические меры Гиббса для НС-модели для нормального делителя индекса два и при некоторых условиях на параметры показана единственность слабо периодической меры Гиббса, а в работе [5] доказана единственность (трансляционно-инвариантность) слабо периодической меры Гиббса для НС-модели при любых значениях параметров. В [6] доказано существование слабо периодических (не периодических) мер Гиббса для НС-модели для нормального делителя индекса четыре на некоторых инвариантах при некоторых условиях на параметры.

Для ознакомления с другими свойствами НС-модели (и их обобщения) на дереве Кэли см. Главу 7 монографии [7].

¹Институт математики, ул. Дурмон йули, 29, Ташкент, 100125, Узбекистан.

E-mail: rozikovu@yandex.ru

²Институт математики, ул. Дурмон йули, 29, Ташкент, 100125, Узбекистан.

E-mail: rustam-7102@rambler.ru

В данной работе изучается крайность ТИМГ для НС-модели на дереве Кэли порядка $k \geq 2$. Мы применяем методы из работы [9]. Дано новое доказательство единственности ТИМГ при всех $k \geq 2$. Найдено условие крайности ТИМГ. Кроме того, при некоторых k даны явные оценки на параметр модели. Наш результат улучшает результаты работ [2], [3] при $k \leq 18$.

2 Определения и известные факты

Дерево Кэли Γ^k порядка $k \geq 1$ — бесконечное дерево, т.е. граф без циклов, из каждой вершины которого выходит ровно $k + 1$ ребро. Пусть $\Gamma^k = (V, L, i)$, где V — есть множество вершин Γ^k , L — его множество ребер и i — функция инцидентности, сопоставляющая каждому ребру $l \in L$ его концевые точки $x, y \in V$. Если $i(l) = \{x, y\}$, то x и y называются *ближайшими соседями вершины* и обозначается $l = \langle x, y \rangle$. Расстояние $d(x, y)$, $x, y \in V$ на дереве Кэли определяется формулой

$$d(x, y) = \min\{d \mid \exists x = x_0, x_1, \dots, x_{d-1}, x_d = y \in V \text{ такие, что } \langle x_0, x_1 \rangle, \dots, \langle x_{d-1}, x_d \rangle\}.$$

Для фиксированного $x^0 \in V$ обозначим

$$W_n = \{x \in V \mid d(x, x^0) = n\}, \quad V_n = \{x \in V \mid d(x, x^0) \leq n\}.$$

Для $x \in W_n$ обозначим (множество прямых потомков вершины x)

$$S(x) = \{y \in W_{n+1} : d(x, y) = 1\}.$$

Известно, что существует взаимнооднозначное соответствие между множеством V вершин дерева Кэли порядка $k \geq 1$ и группой G_k , являющейся свободным произведением $k + 1$ циклических групп второго порядка с образующими a_1, \dots, a_{k+1} , соответственно (см. Главу 1 [7]). Поэтому можно отождествлять множество V с множеством G_k .

Пусть $\Phi = \{0, 1\}$ и $\sigma \in \Phi^V$ -конфигурация, то есть $\sigma = \{\sigma(x) \in \Phi : x \in V\}$, где $\sigma(x) = 1$ означает, что вершина x на дереве Кэли занятая, а $\sigma(x) = 0$ означает, что она свободная. Конфигурация σ называется допустимой, если $\sigma(x)\sigma(y) = 0$ для любых соседних $\langle x, y \rangle$ из $V(V_n$ или W_n , соответственно) и обозначим множество таких конфигураций через Ω (Ω_{V_n} и Ω_{W_n}). Ясно, что $\Omega \subset \Phi^V$.

Для $\sigma_n \in \Omega_{V_n}$ положим

$$\#\sigma_n = \sum_{x \in V_n} \mathbf{1}(\sigma_n(x) \geq 1)$$

число занятых вершин в σ_n .

Пусть $z : x \mapsto z_x = (z_{0,x}, z_{1,x}) \in R_+^2$ векторнозначная функция на V . Для $n = 1, 2, \dots$ и $l > 0$ рассмотрим вероятностную меру $\mu^{(n)}$ на Ω_{V_n} , определяемую как

$$\mu^{(n)}(\sigma_n) = \frac{1}{Z_n} \lambda^{\#\sigma_n} \prod_{x \in W_n} z_{\sigma(x), x}. \quad (1)$$

Здесь Z_n -нормирующий делитель:

$$Z_n = \sum_{\tilde{\sigma}_n \in \Omega_{V_n}} \lambda^{\#\tilde{\sigma}_n} \prod_{x \in W_n} z_{\tilde{\sigma}(x), x}.$$

Говорят, что вероятностная мера $\mu^{(n)}$ является согласованной, если $\forall n \geq 1$ и $\sigma_{n-1} \in \Omega_{V_{n-1}}$:

$$\sum_{\omega_n \in \Omega_{W_n}} \mu^{(n)}(\sigma_{n-1} \vee \omega_n) \mathbf{1}(\sigma_{n-1} \vee \omega_n \in \Omega_{V_n}) = \mu^{(n-1)}(\sigma_{n-1}). \quad (2)$$

В этом случае существует единственная мера μ на (Ω, \mathbf{B}) такая, что для всех n и $\sigma_n \in \Omega_{V_n}$

$$\mu(\{\sigma|_{V_n} = \sigma_n\}) = \mu^{(n)}(\sigma_n),$$

где \mathbf{B} — σ -алгебра, порожденная цилиндрическими подмножествами Ω .

Определение 1. Мера μ , определенная формулой (1) с условием согласованности (2), называется НС-мерой Гиббса с $\lambda > 0$, соответствующей функции $z : x \in V \setminus \{x^0\} \mapsto z_x$.

В следующем утверждении сформулировано условие на z_x , гарантирующее согласованность меры $\mu^{(n)}$.

Утверждение 1.[2]. Вероятностные меры $\mu^{(n)}$, $n = 1, 2, \dots$, заданные формулой (1), согласованны тогда и только тогда, когда для любого $x \in V$ имеет место следующее равенство

$$z'_x = \prod_{y \in S(x)} (1 + \lambda z'_y)^{-1}, \quad (3)$$

где $z'_x = z_{1,x}/z_{0,x}$, $\lambda > 0$ —параметр.

Пусть \hat{G}_k —подгруппа группы G_k .

Определение 2. Совокупность величин $z = \{z_x, x \in G_k\}$ называется \hat{G}_k -периодической, если $z_{yx} = z_x$ для $\forall x \in G_k, y \in \hat{G}_k$.

G_k -периодическая совокупность называется трансляционно-инвариантной.

Определение 3. Мера μ называется \hat{G}_k -периодической, если она соответствует \hat{G}_k -периодической совокупности величин z .

Теорема 1. [4]. Для любого нормального делителя $\mathcal{G} \subset G_k$ всякая \mathcal{G} -периодическая мера Гиббса НС-модели является либо трансляционно-инвариантной, либо $G_k^{(2)}$ -периодической мерой Гиббса, где $G_k^{(2)}$ -подгруппа, состоящая из слов четной длины.

Утверждение 2. $\forall \lambda > 0$ и $k \geq 2$ ТИМГ для НС-модели единственна.

Доказательство. Заметим, что ТИМГ соответствует решению (3) вида $z'_x = z$ для всех $x \in V$, где z удовлетворяет уравнению

$$z = \frac{1}{(1 + \lambda z)^k}. \quad (4)$$

Покажем, что (4) имеет единственное положительное решение при любых значениях $\lambda > 0$ и $k \geq 2$. Действительно, перепишем уравнение (4) в виде

$$f(z) = \lambda^k z^{k+1} + k\lambda^{k-1} z^k + \dots + z - 1 = 0.$$

Ясно, что $f(0) = -1$ и $f(+\infty) = +\infty$. Поэтому уравнение $f(z) = 0$ имеет не менее одного решения. Кроме того, по теореме о количестве положительных корней многочлена (см. стр.28, [8]) уравнение $f(z) = 0$ имеет не более одного положительного решения. Следовательно, уравнение (4) имеет единственное положительное решение. Утверждение доказано.

Замечание 1. В работе [2] единственность решения уравнения (4) была доказана, используя монотонность функции в правой части этого уравнения.

Пусть μ^* обозначает ТИМГ, соответствующую решению уравнения (4).

Известно ([7]), что при

$$\lambda \leq \lambda_{cr} = \lambda_{cr}(k) = \frac{k^k}{(k-1)^{k+1}} \quad (5)$$

$G_k^{(2)}$ -периодическая НС-мера совпадает с μ^* , а при $\lambda > \lambda_{cr}$ существуют не менее трех $G_k^{(2)}$ -периодических мер Гиббса, одна из которых является μ^* .

3 Крайность трансляционно-инвариантной меры Гиббса

Напомним (см. [1]), что мера Гиббса μ (как элемент выпуклого множества) называется крайней, если $\mu \neq s\nu + (1-s)\nu'$ для различных мер Гиббса ν, ν' и $0 < s < 1$.

Из работ [2] и [3] известны следующие теоремы и предложение:

Теорема 2. [2]. При $k \geq 2$ и

$$\lambda > \frac{1}{\sqrt{k}-1} \left(\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k}-1} \right)^k \quad (6)$$

ТИМГ μ^* является не крайней.

Предложение 1. [2]. Если для данных k и λ_0 мера μ^* является не крайней, то она является не крайней при всех $\lambda > \lambda_0$.

Теорема 3. [3]. При $k \geq 2$ и $\lambda = 1$ ТИМГ μ^* является крайней.

Из Предложения 1 и Теоремы 3 получаем

Следствие 1. При $k \geq 2$ и $\lambda \in (0, 1]$ мера μ^* является крайней.

Основным результатом данной работы является следующая

Теорема 4. При $k \geq 2$ и $\lambda \in (0, \lambda_*)$ ТИМГ μ^* является крайней, где

$$\lambda_* = \lambda_*(k) = \frac{1}{t_*^k} \left(\frac{1}{t_*} - 1 \right), \quad (7)$$

и $t_* \in (0, 1)$ является единственным решением уравнения

$$t^{k+1} - kt^2 + (2k-1)t - k + 1 = 0. \quad (8)$$

Доказательство. Мы используем методы из работы [9] (см. также Лемму 5.7 из [10]). Рассмотрим цепь Маркова с состояниями $\{0, 1\}$ и матрицу \mathbf{P}_{μ^*} вероятностных переходов P_{ij} , определенную данной ТИМГ μ^* следующим образом:

$$\mathbf{P}_{\mu^*} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+\lambda z} & \frac{\lambda z}{1+\lambda z} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

где z есть единственное решение уравнения (4). Заметим, что $z \in (0, 1)$.

Приведем необходимые определения из работы [9]. Если удалить произвольное ребро $\langle x^0, x^1 \rangle = l \in L$ из дерева Кэли Γ^k , то оно разбивается на две компоненты $\Gamma_{x^0}^k$ и $\Gamma_{x^1}^k$, каждая из которых называется полубесконечным деревом или полудеревом Кэли.

Рассмотрим конечное полное поддерево \mathcal{T} , которое содержит все начальные точки полудерева $\Gamma_{x^0}^k$. Граница $\partial\mathcal{T}$ поддерева \mathcal{T} состоит из ближайших соседей его вершин, которые лежат в $\Gamma_{x^0}^k \setminus \mathcal{T}$. Мы отождествляем поддерево \mathcal{T} с множеством его вершин. Через $E(A)$ обозначим множество всех ребер A и ∂A .

В [9] ключевыми являются две величины κ и γ . Оба являются свойствами множества мер Гиббса $\{\mu_{\mathcal{T}}^{\tau}\}$, где граничное условие τ фиксировано и \mathcal{T} является произвольным, начальным, полным, конечным поддеревом $\Gamma_{x^0}^k$. Для данного начального поддерева \mathcal{T} дерева $\Gamma_{x^0}^k$ и вершины $x \in \mathcal{T}$ мы будем писать \mathcal{T}_x для (максимального) поддерева \mathcal{T} с начальной точкой в x . Когда x не является начальной точкой \mathcal{T} , через $\mu_{\mathcal{T}_x}^s$ обозначим меру Гиббса, в которой "предок" x имеет спин s и конфигурация на нижней границе \mathcal{T}_x (т.е. на $\partial\mathcal{T}_x \setminus \{\text{предок } x\}$) задается через τ .

Для двух мер μ_1 и μ_2 на Ω через $\|\mu_1 - \mu_2\|_x$ обозначим расстояние по норме

$$\|\mu_1 - \mu_2\|_x = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^1 |\mu_1(\sigma(x) = i) - \mu_2(\sigma(x) = i)|.$$

Пусть $\eta^{x,s}$ есть конфигурация η со спином в x , равным s .

Следуя [9], определим

$$\kappa \equiv \kappa(\mu) = \frac{1}{2} \max_{i,j} \sum_{l=0}^1 |P_{il} - P_{jl}|;$$

$$\gamma \equiv \gamma(\mu) = \sup_{A \subset \Gamma^k} \max \|\mu_A^{\eta^{y,s}} - \mu_A^{\eta^{y,s'}}\|_x,$$

где максимум берется по всем граничным условиям η , всеми $y \in \partial A$, всеми соседями $x \in A$ вершины y и всеми спинами $s, s' \in \{0, 1\}$.

Достаточным условием крайности меры Гиббса μ является $k\kappa(\mu)\gamma(\mu) < 1$.

Используя (9), при $i \neq j$ получим $\kappa = \frac{\lambda z}{1+\lambda z}$. Из работы [9](стр.151, Теорема 5.1.) известно, что для НС-модели справедлива оценка: $\gamma \leq \frac{\lambda}{\lambda+1}$. Значит, для крайности меры μ^* достаточно выполнение неравенства

$$k \cdot \frac{\lambda z}{1 + \lambda z} \cdot \frac{\lambda}{\lambda + 1} < 1. \quad (10)$$

Из уравнения (4) находим

$$\lambda = \lambda(z) = \frac{1}{z} \left(\frac{1}{\sqrt[k]{z}} - 1 \right). \quad (11)$$

Подставляя это выражение в (10), получим

$$z \sqrt[k]{z} - k \sqrt[k]{z^2} + (2k - 1) \sqrt[k]{z} - k + 1 > 0. \quad (12)$$

Обозначим $t = \sqrt[k]{z}$. Ясно, что $z \in (0, 1)$. Отсюда имеем $t \in (0, 1)$. Из (12) получим

$$\varphi(t) = t^{k+1} - kt^2 + (2k - 1)t - k + 1 > 0. \quad (13)$$

Докажем, что неравенство (13) верно при всех $t \in (t_*, 1)$, (где t_* — решение уравнения (8), т.е. $\varphi(t) = 0$). Имеем

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= (k+1)t^k - 2kt + (2k-1) > \min_{t \in (0,1)} \varphi'(t) = \varphi' \left(\sqrt[k-1]{\frac{2}{k+1}} \right) = \\ &= 2k - 1 - 2(k-1) \sqrt[k-1]{\frac{2}{k+1}} > 2k - 1 - 2(k-1) = 1 > 0. \end{aligned}$$

Следовательно, функция $\varphi(t)$ при $t \in (0, 1)$ возрастает и $\varphi(0) = 1 - k < 0$, $\varphi(1) = 1 > 0$. Поэтому $\varphi(t) = 0$ имеет единственное решение $t_* \in (0, 1)$. Следовательно, неравенство $\varphi(t) > 0$ имеет решение только вида $(t_*, 1)$.

Заметим, что функция $\lambda(z) = \lambda(t^k)$ (см. (11)) монотонно убывающая. Значит, из $t \in (t_*, 1)$ следует $\lambda \in (0, \lambda_*)$. Теорема доказана.

Замечание 2. Так как при $k \geq 4$ уравнение (8) не решается в радикалах, то не легко получить явное значение $\lambda_*(k)$. Но при каждом фиксированном значении $k \geq 2$ компьютерный анализ дает приблизительное значение $\lambda_*(k)$. Приведем эти значения при некоторых k :

$$\begin{aligned} \lambda_*(2) &= \frac{1}{3} \sqrt[3]{388 + 12\sqrt{69}} + \frac{52}{3 \sqrt[3]{388 + 12\sqrt{69}}} + \frac{7}{3} \approx 7.159191247, \\ \lambda_*(3) &\approx 3.771210223, \quad \lambda_*(4) \approx 2.745407267, \quad \lambda_*(5) \approx 2.242274271, \\ \lambda_*(18) &\approx 1.015307312, \quad \lambda_*(19) \approx 0.9900721365, \\ \lambda_*(2016) &\approx 0.2680659445, \quad \lambda_*(3000) \approx 0.2497937373. \end{aligned}$$

Следовательно, Теорема 4 улучшает результат Следствии 1 при всех $k \leq 18$.

Замечание 3. Делим обе стороны уравнения (8) на k и рассмотрим $k \rightarrow \infty$. Тогда при $t \in (0, 1)$ уравнение "стремится" к $t^2 - 2t + 1 = 0$, т.е. $t_* \rightarrow 1$ при $k \rightarrow \infty$. Следовательно, $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_*(k) = 0$.

Замечание 4. Пусть $\tilde{\lambda}_k = \lambda_*(k) - \lambda_{cr}(k)$, $k \geq 2$, где λ_{cr} определено в неравенстве (5). Тогда $\tilde{\lambda}_2 = 3.159191247$, $\tilde{\lambda}_3 = 2.083710221$, $\tilde{\lambda}_4 \approx 1.691909325$, $\tilde{\lambda}_5 \approx 1.479334818$.

Список литературы

- [1] Синай Я.Г. Теория фазовых переходов. Строгие результаты, Наука, М., 1980.
- [2] Suhov Yu.M., Rozikov U.A. *A Hard-Core model on a Cayley tree: an example of loss network. Queueing Systems*, **46** (2004), 197–212.
- [3] Martin J.B. *Reconstruction thresholds on regular trees*. Discrete random walks (Paris, 2003), 191–204 (electronic), Discrete Math. Theor. Comput. Sci. Proc., AC, Assoc. Discrete Math. Theor. Comput. Sci., Nancy, 2003.
- [4] Розиков У.А., Хакимов Р.М. *Условие единственности слабопериодической гиббсовской меры для модели жесткой сердцевины*. Теор. и мат. физика, **173**:1 (2012), 60-70.
- [5] Хакимов Р.М. *Единственность слабо периодической гиббсовской меры для HC-модели*. Мат. заметки, 2013, т. 94, No 5, с.796-800.
- [6] Хакимов Р.М. *Слабо периодические меры Гиббса для HC-модели для нормального делителя индекса четыре*. Укр. мат. журн., 2015, т.67, No 10, с.1409-1422.
- [7] Rozikov U.A. Gibbs measures on Cayley trees. World Scientific.-2013.
- [8] Prasolov V.V. Polynomials. (Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2004)
- [9] Martinelli F., Sinclair A., Weitz D. *Fast mixing for independent sets, coloring and other models on trees*. Random Structures and Algorithms, **31** (2007), 134-172.
- [10] Kuelske C., Rozikov U.A. Fuzzy transformations and extremality of Gibbs measures for the Potts model on a Cayley tree. arXiv:1403.5775v2. To appear in Random Structures and Algorithms.